

die Zellenlänge zur Messung von Energien $> 5 \text{ GeV/Nukl.}$ mindestens 4000μ betragen muß. Nur aus Messungen an Spuren länger als 20 mm pro Emulsionsschicht kann daher das Energiespektrum bis zu Energien von 5 GeV/Nukl. richtig erhalten werden.

Herrn Prof. Dr. K. Wirtz danke ich für die freundliche Aufnahme im Max-Planck-Institut für Physik, Herrn Dr. K. Gottstein für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche Diskussionen und den Beobachterinnen für die mühevollen Arbeit beim Durchmustern der Platten. Die Mikrophotographien wurden von Frau H. Baumbach angefertigt.

Zum Zusammenhang zwischen S-Matrix und Normierungsintegralen in der Quantenmechanik

Von GERHART LÜDERS

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 10a, 581—584 [1955]; eingegangen am 11. Juni 1955)

Durch Untersuchung der Schrödinger-Gleichung für die S-Zustände eines spinfreien nicht-relativistischen Teilchens in einem kugelsymmetrischen Potential endlicher Reichweite wird gewonnen: 1. eine neue Ableitung des Zusammenhangs zwischen Residuum der S-Matrix an den gebundenen Zuständen zugeordneten Polen und dem Normierungsintegral der Wellenfunktion; 2a) für Streuzustände ein Zusammenhang zwischen Änderung der S-Matrix mit der Wellenzahl und dem innerhalb der Reichweite liegenden Teil des Normierungsintegrals; 2b) eine hieraus folgende Ungleichung, die kürzlich von Wigner angegeben wurde.

Nach Kramers¹ bestimmen die Pole und Nullstellen der S-Matrix $S(k)$ auf der imaginären k -Achse die stationären Zustände des betreffenden quantenmechanischen Systems. Es konnte überdies gezeigt werden², daß das Residuum von $S(k)$ an den Polen ($k = +i\kappa_n$) bzw. der Wert von $dS(k)/dk$ an den Nullstellen ($k = -i\kappa_n$) mit dem Normierungsintegral der Wellenfunktion des stationären Zustandes in einfacher Weise zusammenhängt. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine Verallgemeinerung dieses Resultats abgeleitet [Gl. (20)], und zwar durch unmittelbare Untersuchung der Änderung der Lösung der Schrödinger-Gleichung bei differentieller Änderung der Wellenzahl k . Durch Spezialisierung wird hieraus einerseits der bereits bekannte Zusammenhang zwischen S-Matrix und Normierungsintegral für stationäre Zustände gewonnen [Gl. (22)], andererseits wird für endliche Reichweite r_0 des Wechselwirkungspotentials ein bisher anscheinend nicht

mitgeteilter Zusammenhang zwischen der Änderung von $S(k)$ auf der reellen k -Achse und dem Anteil des Normierungsintegrals innerhalb der Reichweite erhalten [Gl. (25)]. Diese neue Beziehung ist von Interesse bei der physikalischen Diskussion sogenannter quasistationärer oder zerfallender Zustände. Sie führt ferner unmittelbar zu einer kürzlich von Wigner³ angegebenen Ungleichung.

Die Untersuchung soll beschränkt werden auf die S-Zustände (Drehimpuls null) nicht-relativistischer spinfreier Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential endlicher Reichweite⁴. Statt des asymptotischen Verhaltens der Wellenfunktion darf daher ihr Verhalten außerhalb der Reichweite r_0 betrachtet werden. Das Potential soll frei von Singularitäten sein. Drückt man, wie üblich, die Wellenfunktion $\psi(r)$ durch

$$u(r) = r\psi(r) \quad (1)$$

nicht gelungen ist, dürfte die Behauptung folgendermaßen plausibel gemacht werden können: 1. einfache Beispiele (z.B. Kastenpotential) liefern stets ein $S(k)$ [$a(k)$, $b(k)$], das meromorph, aber nicht rational ist; 2. die von V. Bargmann* untersuchten rationalen $S(k)$ führen zu Potentialen mit unendlicher Reichweite; 3. das Versagen der Bornschen Näherung für $|k| = \infty$ (k jedoch mit nicht-verschwindendem Imaginärteil) deutet auf eine wesentliche Singularität hin.

* V. Bargmann, Rev. Mod. Phys. 21, 488 [1949].

¹ H. A. Kramers, unveröffentlicht; zitiert in den in Anm.² genannten Arbeiten.

² W. Heisenberg, Z. Naturforsch. 1, 608 [1946]; C. Möller, Dan. Mat. Fys. Medd. 22, No. 19 [1946].

³ E. P. Wigner, Phys. Rev. 98, 145 [1955].

⁴ Man vermeidet so die „überzähligen Nullstellen“. Es scheint aber, daß die Funktion $S(k)$ [ebenso wie die weiter unten definierten Funktionen $a(k)$ und $b(k)$] dann grundsätzlich eine wesentliche Singularität bei $k = \infty$ besitzt. Obwohl dem Verf. ein strenger Beweis



aus, so lautet die Schrödinger-Gleichung für S-Zustände

$$u''(r) + (k^2 - V(r)) u(r) = 0, \quad (2)$$

wobei zur Vereinfachung

$$\hbar = 1, m = 1/2 \quad (3)$$

gesetzt wurde. Resultate, die $V(r)$ nicht explizit enthalten, werden durch die Vereinfachung (3) nicht beeinflusst. Striche bedeuten Ableitungen nach der Koordinate r . Die erlaubten Lösungen der Gl. (1) sind durch ihr Verhalten bei $r=0$ gekennzeichnet:

$$u(0) = 0. \quad (4)$$

Die vorausgesetzte endliche Reichweite des Potentials bedeutet

$$V(r) = 0 \text{ für } r > r_0. \quad (5)$$

Es sollen jetzt einerseits Lösungen $\tilde{u}_k(r)$ mit den Anfangsbedingungen

$$\tilde{u}_k(0) = 0, \quad \tilde{u}_k'(0) = 1 \quad (6)$$

betrachtet werden; für $r > r_0$ besitzt $\tilde{u}_k(r)$ notwendig die Form

$$\tilde{u}_k(r) = a(k) e^{ikr} + b(k) e^{-ikr}. \quad (7)$$

Die Funktionen $a(k)$ und $b(k)$ sind ganze analytische Funktionen der Variablen k . Die Differentialgleichung (2) besitzt reelle Koeffizienten für reelle und rein imaginäre Werte von k . Da ferner die Anfangsbedingungen (6) reell sind, so ist auch die Lösung $\tilde{u}_k(r)$ reell für reelles und rein imaginäres k . Die Funktionen $a(k)$ und $b(k)$ sind daher auf der reellen k -Achse konjugiert komplex und auf der imaginären k -Achse beide reell.

Andererseits sollen Lösungen $u_k(r)$ verwandt werden, die sich für $r > r_0$ darstellen lassen

$$u_k(r) = e^{-ikr} - S(k) e^{+ikr} \quad (8)$$

und außerdem natürlich die Randbedingung (4) befriedigen. Offenbar besteht der Zusammenhang

$$\tilde{u}_k(r) = b(k) u_k(r), \quad S(k) = -a(k)/b(k). \quad (9)$$

Die nachfolgende mathematische Beweisführung ist einfacher für die Funktionen $\tilde{u}_k(r)$; von größerem Interesse sind dagegen Aussagen, die die Funktionen $u_k(r)$ enthalten.

Für die zu beweisende Hauptgleichung wird der Differentialquotient der Lösung $\tilde{u}_k(r)$ nach k benötigt

$$w_k(r) = \partial \tilde{u}_k(r) / \partial k. \quad (10)$$

Die Funktion $w_k(r)$ ist definiert durch die Differentialgleichung

$$w_k''(r) + (k^2 - V(r)) w_k(r) = -2k \tilde{u}_k(r) \quad (11)$$

und die Anfangsbedingungen

$$w_k(0) = w_k'(0) = 0. \quad (12)$$

Man kann $w_k(r)$ explizit angeben, wenn man annimmt, daß außer $\tilde{u}_k(r)$ eine zweite, linear unabhängige Lösung der Gl. (2) bekannt ist. Man wähle hierfür etwa diejenige Lösung, die für $r > r_0$ die Gestalt

$$s_k(r) = e^{ikr} \quad (13)$$

besitzt; diese Funktion ist für $b(k) \neq 0$ von $\tilde{u}_k(r)$ linear unabhängig. Da man die Funktion $s_k(r)$ in Wahrheit nicht kennt, darf sie in dem letztlich interessierenden Schlußresultat [Gl. (20)] nicht auftreten. Dieses Schlußresultat erweist sich überdies als unabhängig von der speziellen Wahl (13) der Hilfsfunktion. Die Lösung des durch Gln. (11) und (12) definierten Problems lautet

$$w_k(r) = \frac{i}{b(k)} \int_0^r dr' \tilde{u}_k(r') (\tilde{u}_k(r') s_k(r) - s_k(r') \tilde{u}_k(r)) \quad (14)$$

und speziell für $r > r_0$

$$w_k(r) = \frac{i}{b(k)} \int_0^r dr' \tilde{u}_k(r') (\tilde{u}_k(r') e^{ikr} - s_k(r') \{a(k) e^{ikr} + b(k) e^{-ikr}\}). \quad (15)$$

Durch Differentiation nach r folgt dort

$$\frac{1}{ik} w_k'(r) = \frac{i}{b(k)} \int_0^r dr' \tilde{u}_k(r') (\tilde{u}_k(r') e^{ikr} - s_k(r') \{a(k) e^{ikr} - b(k) e^{-ikr}\}). \quad (16)$$

[Man beweist Gl. (14) am einfachsten durch Einsetzen in Gl. (11) unter Beachtung der Tatsache, daß die aus $\tilde{u}_k(r)$ und $s_k(r)$ gebildete Wronski-Determinante unabhängig von r den Wert

$$\tilde{u}_k(r) s_k'(r) - s_k(r) \tilde{u}_k'(r) = 2ikb(k) \quad (17)$$

besitzt.]

Die in Gl. (7) auftretenden Koeffizienten $a(k)$ und $b(k)$ lassen sich durch die Lösung $\tilde{u}_k(r)$ und ihre erste Ableitung nach r (für $r > r_0$) ausdrücken:

$$a(k) = \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_k(r) + \frac{1}{ik} \tilde{u}_k'(r) \right) e^{-ikr}, \quad (18)$$

$$b(k) = \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_k(r) - \frac{1}{ik} \tilde{u}_k'(r) \right) e^{ikr}.$$

Für die Ableitung dieser Koeffizienten nach k erhält man somit unter Beachtung von Gl. (10):

$$\begin{aligned}\frac{da(k)}{dk} &= \frac{1}{2} \left(w_k(r) + \frac{1}{ik} w_k'(r) \right) e^{-ikr} \\ &\quad - ira(k) - \frac{1}{2k} (a(k) - b(k) e^{-2ikr}), \\ \frac{db(k)}{dk} &= \frac{1}{2} \left(w_k(r) - \frac{1}{ik} w_k'(r) \right) e^{ikr} \\ &\quad + irb(k) + \frac{1}{2k} (a(k) e^{2ikr} - b(k)).\end{aligned}\quad (19)$$

Hier können auf der rechten Seite jetzt Gl. (15) und (16) eingesetzt werden. Man erhält ein Resultat, das die Hilfsfunktion $s_k(r)$ nicht mehr enthält, indem man (für $r > r_0$) bildet:

$$\begin{aligned}b(k) \frac{da(k)}{dk} - a(k) \frac{db(k)}{dk} &= i \int_0^r (\tilde{u}_k(r'))^2 dr' \quad (20) \\ &\quad - 2ira(k)b(k) - \frac{1}{2k} [(a(k))^2 e^{2ikr} - (b(k))^2 e^{-2ikr}].\end{aligned}$$

Dies ist die Hauptgleichung, aus der durch Spezialisierung die beiden angekündigten Resultate gewonnen werden sollen. Man prüft übrigens leicht nach, daß die rechte Seite wirklich von r unabhängig ist (vorausgesetzt, daß $r > r_0$).

Es liege zunächst eine Nullstelle von $a(k)$, und damit von $S(k)$ ⁵, auf der negativ-imaginären Achse vor:

$$a(-i\kappa_n) = 0, \quad S(-i\kappa_n) = 0, \quad \kappa_n > 0. \quad (21)$$

Lösung (7) ist dann quadratisch integrierbar; es liegt ein stationärer Zustand des Systems vor¹. Dividiert man Gl. (20) durch $[b(-i\kappa_n)]^2$ und geht auf der rechten Seite mit r gegen unendlich, so erhält man²

$$\begin{aligned}\frac{dS(-i\kappa_n)}{dk} &= -\frac{1}{b(-i\kappa_n)} \frac{da(-i\kappa_n)}{dk} \\ &= \frac{1}{i} \int_0^\infty (u_{-i\kappa_n}(r))^2 dr.\end{aligned}\quad (22)$$

Hierbei wurde von Gl. (9) Gebrauch gemacht. Beachtet man, daß $u_{-i\kappa_n}(r)$ eine reelle Funktion ist⁶, so sieht man, daß rechts in der Tat das Normierungsintegral dieser Funktion für den stationären Zustand bei $k = -i\kappa_n$ steht.

Nunmehr liege k auf der reellen Achse; man betrachte also Streuzustände. Mittels Division von Gl. (20) durch die reelle Größe⁶ $a(k)b(k) = |b(k)|^2$ erhält man jetzt (für $r > r_0$)

$$\begin{aligned}\frac{d \ln S(k)}{dk} &= \frac{1}{a(k)} \frac{da(k)}{dk} - \frac{1}{b(k)} \frac{db(k)}{dk} \\ &= i \int_0^r |u_k(r')|^2 dr' - 2ir \\ &\quad + \frac{1}{2k} (S(k) e^{2ikr} - S^{-1}(k) e^{-2ikr}).\end{aligned}\quad (23)$$

Rechts tritt wiederum das Normierungsintegral der jetzt komplexen Funktion $u_k(r)$ auf. Dieses Integral kann natürlich nicht bis $r = \infty$ erstreckt werden; es würde dann divergieren. Der kleinste erlaubte Wert auf der rechten Seite ist $r = r_0$. Führt man die Phasenverschiebung $\delta(k)$ ein durch die Definition

$$S(k) = e^{2i\delta(k)} \quad (24)$$

$[\delta(k)$ ist reell für reelles k !], so folgt aus Gl. (23)

$$\begin{aligned}\frac{d\delta(k)}{dk} &= \frac{1}{2} \int_0^{r_0} |u_k(r)|^2 dr - r_0 \\ &\quad + \frac{1}{2k} \sin(2\delta(k) + 2kr_0).\end{aligned}\quad (25)$$

Man erkennt daraus, daß der Anteil der durch Gl. (8) definierten Wellenfunktion $u_k(r)$ „im Innern“ des Potentials ($r < r_0$) besonders groß ist, wenn sich die Phase $\delta(k)$ auf der reellen Achse schnell ändert. Das ist aber genau bei den quasi-stationären (zerfallenden) Zuständen der Fall; diese sind nämlich dadurch gekennzeichnet, daß gilt⁷:

$$S(\pm k_r + ik_i) = 0, \quad S(\pm k_r - ik_i) = \infty \quad (26)$$

($k_i > 0$, $k_i \ll |k_r|$). Wenn Nullstellen und Pole einfach sind, ändert sich die Phase $\delta(k)$ daher auf einem Intervall der Größenordnung $2k_i$ in der Umgebung von $k = k_r$ um etwa π .

Da das in Gl. (25) auftretende Integral stets positiv, der Betrag des Sinus ferner nie größer als eins ist, erhält man für $d\delta(k)/dk$ in Potentialen der Reichweite r_0 (oder kleiner) folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}\frac{d\delta(k)}{dk} &> -r_0 + \frac{1}{2k} \sin(2\delta(k) + 2kr_0) \\ &\geq -\left(r_0 + \frac{1}{2k}\right).\end{aligned}\quad (27)$$

⁵ Würde außer $a(k)$ auch $b(k)$ verschwinden, so würde jede der Randbedingung (4) gehorchende Lösung für $r > r_0$ verschwinden; das würde zur Eindeutigkeit der Lösung im Widerspruch stehen.

⁶ Vgl. die Bemerkungen im Anschluß an Gl. (7).

⁷ Vgl. etwa C. Möller, l. c.²; W. Heisenberg, Theorie des Atomkerns (Vorlesungen S. S. 1950), Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen 1951, S. 91 ff.

Diese Ungleichung wurde kürzlich von Wigner³ aus der allgemeineren Forderung der „Kausalität“ der Wechselwirkung (für $r < r_0$) abgeleitet und in ihrer Bedeutung diskutiert. Erfolgt die Wechselwirkung mittels eines Potentials, so läßt sich die Ungleichung zur Gl. (25) verschärfen.

Herrn Prof. W. Heisenberg danke ich für sein Interesse an der vorliegenden Untersuchung, Herrn Prof. C. Möller für die kritische Durchsicht des Manuskripts und Herrn K. Symanzik für eine interessante Diskussion über das analytische Verhalten der auftretenden Funktionen.

NOTIZEN

Die Sperrfähigkeit von legierten Si-Flächengleichrichtern

Von Adolf Herlet und Hubert Patalong
Laboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG,
Pretzfeld

(Z. Naturforschg. **10a**, 584—586 [1955]; eingeg. am 7. Mai 1955)

Legierte Si-Gleichrichter besitzen im allgemeinen p-s-n-Struktur¹. Ihre Sperrfähigkeit ist ebenso wie die der Gleichrichter mit p-n-Struktur durch einen außerordentlich steilen Anstieg des Sperrstromes begrenzt (Abb. 1). Die „Grenzspannung“ U_B ², bei der der Stromanstieg abrupt einsetzt, wurde von Pearson und Sawyer unter der Annahme einer kritischen Feldstärke von $2,5 \cdot 10^5 \text{ V cm}^{-1}$ aus dem Störstellengehalt bzw. aus

dem spez. Widerstand der beiden p- und n-leitenden Bereiche einer p-n-junction abgeschätzt³. Bei Gleichrichtern mit p-s-n-Struktur geht praktisch nur der spez. Widerstand der hochohmigen Mittelzone ein, und die angegebene Formel reduziert sich z.B. im Falle einer p-leitenden Mittelzone auf

$$\frac{U_B}{\text{Volt}} = 8 \cdot \left(\frac{\varrho_p}{\Omega \text{ cm}} \right). \quad (1)$$

Wir haben diesen Zusammenhang zwischen Grenzspannung U_B und spez. Widerstand an legierten Si-Gleichrichtern mit p-leitender Mittelzone geprüft (Abb. 2). Die Darstellung enthält Meßwerte von etwa 30 Gleichrichtern mit sauber definiertem Steilanstieg des Sperrstromes. Es sind hierbei jeweils kleinere Gruppen mit gleichem ϱ_p -Wert zu einem Meßpunkt zusam-

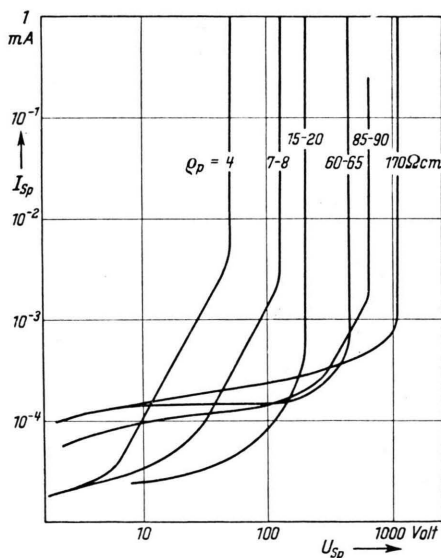


Abb. 1. Sperrkennlinien von Siliciumgleichrichtern mit intensiver Oberflächenbehandlung. $T = 300^\circ \text{ K}$, Gleichrichterfläche $F = 1\text{--}2 \text{ mm}^2$.

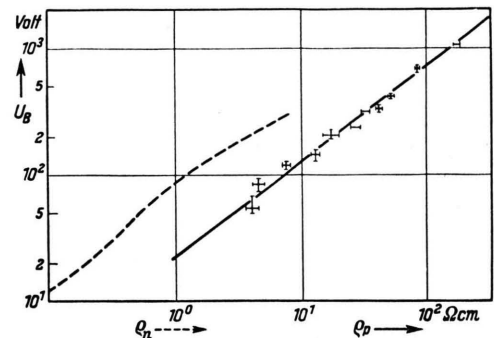


Abb. 2. Grenzspannung U_B als Funktion des spez. Widerstandes ϱ_p des Mittelgebietes. — — — Verlauf von U_B mit ϱ_n nach D. K. Wilson (siehe McKay²).

mengefaßt (z.B. $\varrho_p = 15\text{--}20 \text{ } \Omega \text{ cm}$; $U_B = 190, 230, 225, 197$ und 200 Volt zu einem Mittelwert 208 Volt). Die ϱ_p -Werte wurden durch Sondenmessung (Zweispitzenmethode) an den einkristallinen Siliciumstäben gemessen, die als Ausgangsmaterial für die Gleichrichtherstellung verwandt wurden. Bei der Bestimmung der Grenzspannung U_B lag eine gewisse Schwierigkeit dar-

¹ A. Herlet u. E. Spenke, Z. angew. Phys. **7** [1955], Heft 2, 3 und 4.

² Wir vermeiden hier bewußt den häufig benutzten Ausdruck: „Zener-Spannung“, da neben dem Zener-Effekt auch andere Ursachen für den Steilanstieg verantwortlich sein können. Vgl. z.B. K. G. McKay,

Phys. Rev. **94**, 877 [1954]. Dieser Arbeit entnehmen wir auch die Bezeichnung U_B , deren Index B sich von „breakdown“ herleitet.

³ G. L. Pearson u. B. Sawyer, Proc. Instn. Radio Engrs, Aust. **40**, 1348 [1952].